Probe klausur 07/08

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist und bestimmen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n} - \sqrt{n-1})(\sqrt{n} + \sqrt{n-1}) = 1$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass folgende Reihen konvergent sind.

1. $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{3}{4} + \frac{1}{n})^n$
2. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+1}$
3. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$

WS 07/08

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sqrt{n^2+n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

Hinweis: Mit der dritten binomischen Formel gilt $(\sqrt{n^2+n} - n)(\sqrt{n^2+n} + n) = n$.

[*8 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergent ist.

[*8 Punkte*]

Nachklausur 07/08

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{10^n} x^n$ für alle x mit $|x| < 10$ konvergent ist.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n3^n}{(n+1)!}$ konvergent ist.

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

WS 08/09

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Folge $(\frac{\sin(n)}{n})$ konvergent ist, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 7

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ Reihen mit $a_i > 0$ und $b_i > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Die Folge $(\frac{a_n}{b_n})$ sei konvergent.

Beweisen Sie: Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergent, so ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent.

[*12 Punkte*]

SS 09

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(-2)^{-n}$ konvergiert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 9

Die reelle Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 88$ und $a_n = \sqrt{a_{n-1} + 12}$ für alle $n > 1$.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

   Hinweis: Hier könnte es nützlich sein, auch die Folge (a_{n+1}^2) zu betrachten.

[8 + 4 = 12 Punkte]

WS 09/10

Aufgabe 6

1. Beweisen Sie, dass $(-1, 1)$ das Konvergenzintervall der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n}}$ ist.
2. Untersuchen Sie, ob diese Potenzreihe in den Punkten $x = 1$ beziehungsweise $x = -1$ konvergent ist.

[6 + 8 = 14 Punkte]

Aufgabe 8

Sei $x_0 \in (0, 1)$ fest gewählt. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{x_0 + a_n}{1 + a_n}$.

Sie dürfen im Folgenden ohne Beweis verwenden, dass $a_n > \sqrt{x_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

1. Beweisen Sie mit Hilfe des Monotonieprinzips, dass (a_n) konvergent ist.
2. Bestimmen Sie den Grenzwert von (a_n).

[4 + 6 = 10 Punkte]

SS 10

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$ konvergiert.

[*4 Punkte*]

Aufgabe 9

Die reelle Folge (a_n) sei wie folgt definiert: Es sind $a_1 = 3$ und $a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{2}{a_n}$ für alle $n \geq 1$.

1. Beweisen Sie mit dem Monotonieprinzip, dass (a_n) konvergent ist.
2. Berechnen Sie den Grenzwert der Folge.

Hinweis: Beweisen Sie zunächst, dass $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist.

[*8 + 6 = 14 Punkte*]

WS 10/11

Aufgabe 7

Bestimmen Sie den Grenzwert der Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{3^n} + \frac{1}{n(n+1)})$.

Hinweis: Möglicherweise ist folgende Gleichung hilfreich: $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

[*12 Punkte*]

Aufgabe 8

Untersuchen Sie, ob die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{17^n}$ konvergiert.

[*6 Punkte*]

SS 11

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) mit $a_n = \sum\limits_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergent ist.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie (zum Beispiel mit Hilfe des Quotientenkriteriums) für welche $x \in \mathbb{R}$ die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ konvergent ist.

[*8 Punkte*]

WS 11/12

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass die durch

$$a_1 = 8\ , \quad a_{n+1} = 1 + \sqrt{a_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

rekursiv definierte Folge konvergiert. Bestimmen Sie ihren Grenzwert. (Hinweis: Monotonieprinzip, vollständige Induktion.)

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt.

[*8 Punkte*]

SS 12

Aufgabe 6

Sei $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > 0$. Für alle $n \geq 1$ sei $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} > 0$.

Beweisen Sie, dass die Folge (a_n) konvergent ist.

[*6 Punkte*]

Aufgabe 7

1. Begründen Sie, warum Sie beim Beweis, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist, das Leibnizkriterium NICHT anwenden können.
2. Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+(-1)^n}{n^2}$ konvergent ist (z.B indem Sie sie als Summe konvergenter Reihen schreiben).

[*4 + 4 = 8 Punkte*]

WS 12/13

Aufgabe 4

1. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n) = \left(\frac{2^n}{n!}\right)$ eine Nullfolge ist.

2. Ist die Folge

$$(b_n) = \left(\frac{n! + n}{2(n!) + 2^n}\right)$$

konvergent? Wenn ja, wogegen? (Aufgabenteil 1. darf verwendet werden.)

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 6

Beweisen Sie: Wenn für eine Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a > 0 ,$$

dann hat die Potenzreihe den Konvergenzradius $\frac{1}{a}$. Hinweis: Quotientenkriterium für „gewöhnliche" Reihen.

[*10 Punkte*]

SS 13

Aufgabe 7

Zeigen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n$$

für $|x| < 1$ konvergiert und für $|x| > 1$ divergiert. Wie verhält sich die Reihe für $x = 1$ und $x = -1$?

[*10 Punkte*]

WS 13/14

Aufgabe 5

Untersuchen Sie, ob der Grenzwert

$$\lim_{x \to 0} \frac{x \sin(x)}{\ln(1 + x^2)}$$

existiert, und bestimmen Sie ihn gegebenenfalls.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 6

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{n+2}}{n} x^n$$

konvergiert, d.h. bestimmen Sie ihren Konvergenzradius R und begründen Sie, ob für $x = -R$ und $x = R$ Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Konvergiert die Reihe für $x = -\frac{1}{2}$ bzw. für $x = \frac{1}{3}$?

[*8 + 2 = 10 Punkte*]

SS 14

Aufgabe 6

Beweisen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{k+(-1)^k}{k^2}$ konvergent ist, dass dies aber, obwohl die Reihe alternierend ist, nicht mit dem Leibnitzkriterium gezeigt werden kann.

[*10 Punkte*]

WS 14/15

Aufgabe 5

Es sei (a_n) die in Aufgabe 1 definierte Folge.
a) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert, und bestimmen Sie ihren Grenzwert.
b) Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{a_n}\right)^n ?$$

Hinweise: Monotonieprinzip; das Ergebnis von Aufgabe 1 kann ohne Beweis benutzt werden.

[*7 + 5 Punkte*]

SS 15

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n n!}$
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (1 + \frac{(-1)^n}{n})^{n^2}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

WS 15/16

Aufgabe 4

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und bestimmen Sie sie ggf.:

$$a) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin(n)\cdot\cos(n)}{n} \quad , \qquad b) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)\cdot\cos(x)}{x} \ .$$

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

Aufgabe 6

Begründen Sie, ob die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

konvergiert oder divergiert.

[*8 Punkte*]

SS 16

Aufgabe 5

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $0 < b_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \prod_{i=1}^{n} b_i \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

konvergiert.

(Hinweis: Monotonieprinzip)

[*8 Punkte*]

Aufgabe 7

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz.

(a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{n}\right)^7$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt{3+n}$

(c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{3n^n}$

[*10 Punkte*]

WS 16/17

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$a)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1}\,, \qquad b)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^4+1}\,, \qquad c)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n+1}$$

auf Konvergenz.

[*3 + 3 + 4 = 10 Punkte*]

SS 17

Aufgabe 6

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n < 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Zeigen Sie, dass es zu jedem $m \in \mathbb{N}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_m < a_n$ für alle $n \geq n_0$ gibt.

[*10 Punkte*]

Aufgabe 7

Welche der beiden folgenden Reihen konvergieren?

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-7)^n}{5^{n+1}}$

(b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

[*6 + 6 = 12 Punkte*]

WS 17/18

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihen

$$i)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}\,, \qquad ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{n^2}$$

auf Konvergenz.

[*5 + 5 = 10 Punkte*]

SS 18

Aufgabe 7

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{n}\right) x^n?$$

[*10 Punkte*]

WS 18/19

Aufgabe 6

Untersuchen Sie die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!n^n}{(2n)!}$$

auf Konvergenz.

[*8 Punkte*]

SS 19

Aufgabe 7

Gegeben sei die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2}$. Zeigen Sie, dass diese Reihe konvergiert, aber nicht absolut konvergiert.

[*10 Punkte*]